УДК 517.972.8

А. Г. Ченцов

К ВОПРОСУ О РАСШИРЕНИИ АБСТРАКТНЫХ ЗАДАЧ О ДОСТИЖИМОСТИ*

1. Введение

Рассмотрим общую проблему выбора объекта, имеющего смысл варианта асимптотического поведения. Полагаем заданным непустое множество E (пространство обычных решений). Посредством того или иного непустого семейства $\mathcal{E}$ подмножеств E определяются ограничения асимптотического характера на выбор конкретного решения. Обычные решения – точки E – дополняются асимптотическими аналогами, в простейшем случае определяемыми в виде последовательностей обычных решений (см. конструкции [1, гл. III, IV]). В последнем случае выделяется множество допустимых последовательностей $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ в E посредством условия: при всяком выборе $U \in \mathcal{E}$ должно выполняться включение $e_j \in U$ с некоторого момента. Решение выбирается в интересах достижения точек фиксированного множества $\mathbf{H}$ на значениях заданного отображения

$$\mathbf{h}\colon E \longrightarrow \mathbf{H}. \tag{1.1}$$

Прототипом рассматриваемой постановки является задача о построении и исследовании области достижимости, играющая важную роль в теории управления и ее приложениях (см. [2–4] и др.). Упомянутая конкретная задача представляет практический интерес: ее решение определяет потенциальные возможности систем управления в различных прикладных задачах (см., например, [5]). Наиболее интересно такое решение в случае, когда оно учитывает эффекты, связанные с «малыми» возмущениями условий. В частности, важно проанализировать эффекты, отвечающие ослаблению ограничений (последние определяются зачастую с некоторым «запасом», что естественно с точки зрения обеспечения надежного функционирования системы). Поскольку указать нужную степень ослабления условий удается не всегда, вполне естественна асимптотическая постановка в духе конструкций [1], оперирующая так называемыми приближенными решениями. Говоря о допустимых последовательностях обычных решений, мы следуем подходу [1]

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00414).

с несущественными отличиями, отвечающими особенностям рассматриваемых здесь задач в сравнении с [1].

Упомянутое выше семейство $\mathcal{E}$ может, в частности, формироваться следующим весьма распространенным способом. Пусть наряду с $\mathbf{H}$, именуемым ниже пространством оценок, заданы множество $\mathbf{X}$, отображение

$$\mathbf{s}\colon E \longrightarrow \mathbf{X} \tag{1.2}$$

и множество Y, $Y \subset \mathbf{X}$. В терминах (1.2) определяется условие $\mathbf{s}(e) \in Y$ на выбор $e \in E$, именуемое далее Y-ограничением. Множество $\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y))$ (образ $\mathbf{s}^{-1}(Y)$) определяет аналог области достижимости в задачах управления. Оно является, конечно, решением задачи о достижимости на значениях $\mathbf{h}$ при наличии Y-ограничения. Представляет интерес исследование возможностей, связанных с ослаблением Y-ограничения.

Пусть $\mathbf{X}$ и $\mathbf{H}$ оснащены топологиями θ и τ соответственно. Рассмотрим непустое семейство $\mathcal{Y}$ окрестностей Y в топологическом пространстве (ТП) $(\mathbf{X}, \theta)$. Вместо Y-ограничения используем следующие условия на выбор решения-точки $e \in E$: $\mathbf{s}(e) \in \mathbf{\Gamma}$, где $\mathbf{\Gamma} \in \mathcal{Y}$. Ограничиваясь здесь рассмотрением секвенциальных приближенных решений в духе [1, гл. III], введем семейство $\mathcal{E}$ подмножеств E, составленное из прообразов всевозможных множеств $\mathbf{\Gamma} \in \mathcal{Y}$, после чего будем рассматривать допустимые в смысле $\mathcal{E}$, или $\mathcal{E}$-допустимые, последовательности $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ в множестве E, а также последовательности-образы $(\mathbf{h}(e_i))_{i=1}^{\infty}$. Среди последних оставляем только сходящиеся в ТП $(\mathbf{H}, \tau)$; получающиеся при этом пределы называем элементами притяжения (ЭП), а множество всех таких пределов – множеством притяжения (МП). В более общих случаях применения (вместо последовательностей) фильтров E и направленностей в E логика построения ЭП и МП аналогична. В рамках данного подхода МП является естественной характеристикой возможностей, связанных с ослаблением Y-ограничения; однако использование в качестве асимптотических версий решения только последовательностей может ограничивать эти возможности (см. пример в заключительной части работы [6]).

Естественный способ построения МП связывается с обобщенной задачей, в основу которой закладывается идея расширения пространства (обычных) решений. Обычно расширение реализуется посредством компактификации упомянутого пространства, допускающей естественные аналогии с расширением ТП. Ниже отмечаются и некоторые иные возможности в этом направлении. В качестве «материала» при построении расширений часто используются меры (см. в этой связи подробное изложение современной теории меры в [7, 8]), хотя в самой основе подхода находятся конструкции общей топологии (см. [9–12]). Построения расширений, сочетающие элементы топологии и теории меры, см., например, в [1, 13–17].

По причинам теоретико-множественного характера для целей формализации асимптотических версий решения удобнее использовать фильтры и, в частности, ультрафильтры пространства обычных решений, хотя направленности пригодны для строгого определения МП (это используется в дальнейшем). Учитываем естественную связь фильтров и направленностей (см. [18, § 1.6]). Важная роль ультрафильтров определяется конструкциями, применяемыми в общей топологии и связанными с компактификацией Стоуна–Чеха и расширением Волмэна (см. [19, § 6]).

В связи с применением расширений и релаксаций (см. [20]) отметим линейные задачи управления с импульсными ограничениями и разрывностью в коэффициентах при управлении. Соответствующие примеры рассматривались в [13, гл. 1; 14, гл. 1, 2; 21, гл. 1] и во многих других работах. Для построения компактификаций использовались конечно-аддитивные меры, что связано с эффектом, имеющим смысл произведения разрывной функции на обобщенную. Рассматривались (см. [14, гл. 4]) постановки, для которых применение конечно-аддитивных мер имело более общий характер в сравнении с компактификациями. Сейчас только наметим пример такого рода (в связи с возможной «некомпактифицируемостью» данного класса задач см. рассуждение в [14, с. 156]). Рассмотрим движение материальной точки переменной массы на промежутке времени $[0, 1]$:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \qquad \dot{x}_2(t) = \beta(t) f(t). \tag{1.3}$$

Полагаем, что β – заданная (неотрицательная) функция на $[0, 1[$, ограниченная снизу константой $\kappa \in]0, \infty[$ и допускающая равномерное приближение кусочно-постоянными и непрерывными справа функциями на $[0, 1[$. Функция f в (1.3) – неотрицательное управление на $[0, 1[$, полагаемое кусочно-постоянным и непрерывным справа. Пусть выбор f стеснен ограничением следующего вида:

$$\left(\int_0^1 g_1(t) f(t)\, dt, \, \ldots, \int_0^1 g_{\mathbf{k}}(t) f(t)\, dt \right) \in \mathbb{Y}, \tag{1.4}$$

где $\mathbf{k}$ – натуральное число; $g_1, \ldots, g_{\mathbf{k}}$ – функции на полуинтервале $[0, 1[$, допускающие каждая равномерное приближение кусочно-постоянными и непрерывными справа функциями; $\mathbb{Y}$ – непустое замкнутое множество в $\mathbf{k}$-мерном арифметическом пространстве. Начальное состояние $x(0) = x^0$ (x^0 – плоский вектор) системы (1.3) фиксируем.

Рассмотрим задачу о построении области достижимости системы (1.3) в момент $t = 1$ при условиях (1.4). В данной системе условий отсутствует, вообще говоря, требование интегральной ограниченности управлений (см. [14, с. 156]). Имеем, стало быть, здесь в общем случае «неограниченную» задачу. Представляет интерес исследование поведения области достижимости при замене $\mathbb{Y}$ окрестностями данного множества и, в частности, исследование МП при введении естественного семейства множеств в качестве ограничений асимптотического характера. Со ссылкой на [14, с. 156] (см. также [13, с. 2–5]) отметим, что в данном примере возможно скачкообразное изменение области достижимости при вышеупомянутой замене (можно ограничиться использованием вместо $\mathbb{Y}$ ε-окрестностей этого множества при $\varepsilon > 0$). В этой связи построение МП представляет уже не только теоретический, но и практический интерес. В свою очередь, для этого следует указать нужный вариант обобщенной задачи, подобно тому как в [1, гл. III, IV] это было сделано для задач управления с геометрическими ограничениями; систематическое исследование этих задач было начато Л. С. Понтрягиным.

В связи с построением расширений задач импульсного управления отметим общий подход Н. Н. Красовского [2], который послужил основой целого ряда исследований, связанных с применением аппарата теории обобщенных функций.

2. Общие сведения

Используется стандартная теоретико-множественная символика. Применяем (для сокращения формулировок) кванторы и связки; выражение $\exists!$ заменяет фразу «существует и единственно», $\triangleq$ – равенство по определению (см. раздел 1). Используем аксиому выбора; называем семейством всякое множество, все элементы которого сами являются множествами. Если x – какой-либо объект, то через $\{x\}$ обозначаем одноэлементное множество, содержащее x.

Через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) подмножеств множества X; пусть $\mathrm{Fin}(X)$ – семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$. Через B^A обозначается [12, с. 77] множество всех отображений, действующих из множества A в множество B. При $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$ множество $f^1(C) \triangleq \{f(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ есть образ C при действии f, а $(f \mid C) \in B^C$ – сужение f на C, для которого $(f \mid C)(u) = f(u)$ при $u \in C$. Если A и B – множества, а $f \in B^A$, то определяем семейства

$$f^1[\mathcal{U}] \triangleq \{f^1(U) : \ U \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(B)) \quad \forall \mathcal{U} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)),$$

$$f^{-1}[\mathcal{V}] \triangleq \{f^{-1}(V) : \ V \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \quad \forall \mathcal{V} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(B)).$$

Для всяких множеств A и B полагаем $B^A_{(*)} \triangleq \{f \in B^A \mid f^1(A) = B\}$, получая множество всех сюръекций A на B. Если $\mathcal{X}$ – семейство, а Y – множество, то через $\mathcal{X}\mid_Y$ обозначаем семейство всех множеств $X \cap Y$, $X \in \mathcal{X}$. Наконец, для любого множества U и произвольного семейства $\mathcal{U} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(U))$ полагаем $\mathbf{C}_U[\mathcal{U}] \overset{\triangle}{=} \{U \setminus V :\ V \in \mathcal{U}\}$.

Элементы топологии. Если (X,τ) – ТП и $A \in \mathcal{P}(X)$, то

1) через $\mathrm{cl}(A,\tau)$ обозначается замыкание множества A в ТП (X,τ);
2) в виде $\tau\mid_A$ реализуется топология A, индуцированная из (X,τ), $(A,\tau\mid_A)$ – подпространство (X,τ) (см. [9, 10] и др.);
3) семейство $\mathbb{N}^0_\tau[A] \overset{\triangle}{=} \{G \in \tau \mid A \subset G\}$ определяет семейство

$$\mathbb{N}_\tau[A] \overset{\triangle}{=} \{H \in \mathcal{P}(X) \mid \exists\, G \in \mathbb{N}^0_\tau[A] :\ G \subset H\}$$

всех окрестностей [9] множества A в ТП (X,τ).

Если (X,τ) – ТП и $x \in X$, то полагаем $N^0_\tau(x) \overset{\triangle}{=} \mathbb{N}^0_\tau[\{x\}]$, и, кроме того, $N_\tau(x) \overset{\triangle}{=} \mathbb{N}_\tau[\{x\}]$ (семейство всех окрестностей точки x в ТП (X,τ)). Для всякого ТП (X,τ) через $(\tau-\mathrm{comp})[X]$ обозначаем семейство всех компактных [18, с. 196] подмножеств X; наконец,

$$(\tau-\mathrm{comp})^0[X] \overset{\triangle}{=} \{S \in \mathcal{P}(X) \mid \exists\, K \in (\tau-\mathrm{comp})[X] :\ S \subset K\}$$

(если (X,τ) – хаусдорфово ТП, то $(\tau-\mathrm{comp})^0[X]$ – семейство всех множеств $S \in \mathcal{P}(X)$ таких, что $\mathrm{cl}(S,\tau) \in (\tau-\mathrm{comp})[X]$).

Если (U,τ_1) и (V,τ_2) – два ТП, то:

1) $C(U,\tau_1,V,\tau_2) \overset{\triangle}{=} \{f \in V^U \mid f^{-1}[\tau_2] \subset \tau_1\}$ (множество всех непрерывных, в смысле τ_1 и τ_2, операторов из множества V^U);
2) $C_{\mathrm{cl}}(U,\tau_1,V,\tau_2) \overset{\triangle}{=} \{f \in C(U,\tau_1,V,\tau_2) \mid f^1(F) \in \mathbf{C}_V[\tau_2]\ \forall\, F \in\ \in \mathbf{C}_U[\tau_1]\} = = \{f \in V^U \mid f^1(\mathrm{cl}(A,\tau_1)) = \mathrm{cl}(f^1(A),\tau_2)\ \forall\, A \in \mathcal{P}(U)\}$;
3) $C_{\mathbf{ap}}(U,\tau_1,V,\tau_2) \overset{\triangle}{=} \{f \in C_{\mathrm{cl}}(U,\tau_1,V,\tau_2) \mid f^{-1}(\{y\}) \in (\tau_1-\mathrm{comp})[U]\ \forall\, y \in V\}$.

В 1–3 определены непрерывные, замкнутые и почти совершенные [18, с. 287] отображения. Как обычно [19, с. 8], компактом называем компактное хаусдорфово ТП.

Фильтры и их базы, ультрафильтры. Для всякого множества X через $\beta[X]$ (через $\beta_0[X]$) обозначаем множество всех семейств $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X))$ (всех семейств $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(X))$), каждое из которых обладает свойством $\forall\, B_1 \in \mathcal{B}$

$\forall\, B_2 \in \mathcal{B}\ \exists\, B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Элементы $\beta_0[X]$ – базы фильтров X и только они. Через $\ [X]$ обозначаем множество всех фильтров [9, гл. I] множества X; именно, $\ [X]$ – множество всех семейств $\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(X))$, для каждого из которых:

1) $A \cap B \in \mathcal{F}\ \ \forall\, A \in \mathcal{F}\ \forall\, B \in \mathcal{F}$,
2) $\forall\, F \in \mathcal{F}\ \forall\, G \in \mathcal{P}(X)\ \ ((F \subset G) \Longrightarrow (G \in \mathcal{F}))$.

В терминах $\ [X]$ определяется множество всех ультрафильтров X:

$$\ _{\mathbf{u}}[X] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{F} \in \ [X] \mid \forall\, \mathcal{G} \in \ [X]\ \ ((\mathcal{F} \subset \mathcal{G}) \Longrightarrow (\mathcal{F} = \mathcal{G}))\}. \tag{2.1}$$

Само X погружается в (2.1) посредством сопоставления точкам X тривиальных ультрафильтров:

$$(X - \mathrm{ult})[x] \overset{\triangle}{=} \{F \in \mathcal{P}(X) \mid x \in F\} \in \ _{\mathbf{u}}[X]\quad \forall\, x \in X.$$

Итак, для каждого непустого множества S определяем отображение $(S - \mathrm{ult})[\cdot]$ (правило погружения) как $x \longmapsto (S - \mathrm{ult})[x] :\ S \longrightarrow\ \ _{\mathbf{u}}[S]$. Кроме того, погружение семейства $\mathcal{P}(S)$ в $\mathcal{P}(\ _{\mathbf{u}}[S])$ реализуется как

$$A \longmapsto \{\mathcal{F} \in \ _{\mathbf{u}}[S] \mid A \in \mathcal{F}\} :\ \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(\ _{\mathbf{u}}[S]),$$

данное погружение обозначаем через $\varphi[S]$. Семейство-образ $\varphi[S]^1(\mathcal{P}(S)) = \{\varphi[S](H) :\ H \in \mathcal{P}(S)\}$ есть база стандартной топологии множества $\ _{\mathbf{u}}[S]$, обозначаемой ниже через $\tau_{\mathbf{fi}}[S]$, причем $(\ _{\mathbf{u}}[S], \tau_{\mathbf{fi}}[S])$ есть нульмерный [18, § 6.2] компакт (в связи с этими построениями см. [18, § 3.6; 19]).

Если H – множество, а $\mathcal{H} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(H))$, то через $\ ^{0}_{\mathbf{u}}[H \mid \mathcal{H}]$ обозначаем множество всех ультрафильтров $\mathcal{F} \in \ _{\mathbf{u}}[H]$ таких, что $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$.

Для всяких множества X и базы фильтра $\mathcal{B} \in \beta_0[X]$ определяется [9, гл. I] фильтр $(S - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \in \ [X]$ (порожденный $\mathcal{B}$) как семейство всех множеств $L \in \mathcal{P}(X)$ со свойством $\exists\, B \in \mathcal{B} :\ B \subset L$. Всегда $\ [X] \subset \beta_0[X]$.

Для всяких множеств U и V, базы фильтра $\mathcal{B} \in \beta_0[U]$ и отображения $f \in V^U$ имеем $f^1[\mathcal{B}] \in \beta_0[V]$; образ базы ультрафильтра сам является базой некоторого ультрафильтра:

$$((U - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \in \ _{\mathbf{u}}[U]) \Longrightarrow ((V - \mathbf{fi})[f^1[\mathcal{B}]] \in \ _{\mathbf{u}}[V]).$$

Вопросы сходимости. Если (X, τ) – ТП, $\mathcal{B} \in \beta_0[X]$ и $x \in X$, то [9, гл. I], $(\mathcal{B} \overset{\tau}{\Longrightarrow} x) \Longleftrightarrow (N_\tau(x) \subset (X - \mathbf{fi})[\mathcal{B}])$. В качестве $\mathcal{B}$ можно использовать фильтр (и в частности, ультрафильтр), а также образ базы фильтра (сходимость по Мору–Смиту можно ввести через сходимость фильтров).

Направленностью в произвольном множестве $\mathbf{S}$ называем всякий триплет $(D, \preceq, f)$, где $(D, \preceq)$ – непустое направленное множество [18, гл. 1], а $f \in \mathbf{S}^D$; если $(D, \preceq, f)$ – направленность в $\mathbf{S}$, то

$$(\mathbf{S} - \text{ass})[D; \preceq; f] \stackrel{\triangle}{=} \Big\{ U \in \mathcal{P}(\mathbf{S}) \mid \exists\, d_1 \in D\ \forall\, d_2 \in D,$$

$$\big((d_1 \preceq d_2) \Longrightarrow (f(d_2) \in U)\big)\Big\} \in \quad [\mathbf{S}] \qquad (2.2)$$

(фильтр множества $\mathbf{S}$, ассоциированный с направленностью $(D, \preceq, f)$; см. [10]). Если $\mathcal{F} \in \quad [\mathbf{S}]$, то для некоторой направленности $(\mathbb{D}, \sqsubseteq, g)$ во множестве $\mathbf{S}$ имеем $\mathcal{F} = (\mathbf{S} - \text{ass})[\mathbb{D}; \sqsubseteq; g]$. Традиционную сходимость по Мору–Смиту определяем как сходимость ассоциированного фильтра (см. (2.2)): если (X, τ) – ТП, $(D, \preceq, f)$ – направленность в X и $x \in X$, то по определению

$$((D, \preceq, f) \xrightarrow{\tau} x) \Longleftrightarrow ((X - \text{ass})[D; \preceq; f] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} x).$$

Натуральный ряд $\mathcal{N} \stackrel{\triangle}{=} \{1; 2; ...\}$ с обычной упорядоченностью $\leqslant$ есть непустое направленное множество. При $k \in \mathcal{N}$ полагаем, что $\overline{1, k} \stackrel{\triangle}{=} \{i \in \mathcal{N} \mid i \leqslant k\}$.

3. Общие свойства множеств притяжения

В настоящем разделе рассматриваем отображения пространства решений E в произвольные ТП; если (X, τ) – ТП, $r \in X^E$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то (см. [14, 20]) через $(\mathbf{as})[X; \tau; r; \mathcal{E}]$ обозначается множество всех $x \in X$, для каждого из которых существует такая направленность $(D, \preceq, f)$ во множестве E, что ($\circ$ – символ суперпозиции)

$$(\mathcal{E} \subset (E - \text{ass})[D; \preceq; f]) \;\&\; ((D, \preceq, r \circ f) \xrightarrow{\tau} x). \qquad (3.1)$$

Конечно, $(\mathbf{as})[X; \tau; r; \mathcal{E}]$, а это и есть МП, можно определить не только в терминах (3.1), но и в терминах фильтров и ультрафильтров (см. [15]). Однако ограничиваемся сейчас использованием (3.1) и сходимости по Мору–Смиту. Если при условиях, определяющих (3.1), $\mathcal{E} \in \beta[E]$, то (см. [13–15])

$$(\mathbf{as})[X; \tau; r; \mathcal{E}] = \bigcap_{U \in \mathcal{E}} \text{cl}(r^1(U), \tau). \qquad (3.2)$$

При всяком выборе семейства $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ через $\mathcal{E}_{\mathbf{f}}$ условимся обозначать семейство всех множеств $\bigcap\limits_{U \in \mathcal{K}} U$, $\mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{E})$; тогда $\mathcal{E}_{\mathbf{f}} \in \beta[E]$ и для всяких ТП (X, τ) и оператора $r \in X^E$

$$(\mathbf{as})[X; \tau; r; \mathcal{E}] = (\mathbf{as})[X; \tau; r; \mathcal{E}_{\mathbf{f}}]. \qquad (3.3)$$

Предложение 3.1. *Пусть* (X, τ) *и* $(K, \mathbf{t})$ – *два ТП, отображения* $m \in K^E$ *и* $g \in C_{\mathbf{ap}}(K, \mathbf{t}, X, \tau)$, *тогда*

$$(\mathbf{as})[X; \tau; g \circ m; \mathcal{E}] = g^1((\mathbf{as})[K; \mathbf{t}; m; \mathcal{E}]) \ \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \tag{3.4}$$

Доказательство вытекает из (3.3) и положений [16, 17, 20].

Следствие 3.1. *Если* (X, τ) – *хаусдорфово, а* $(K, \mathbf{t})$ – *компактное ТП, то при всяком выборе* $m \in K^E$ *и* $g \in C(K, \mathbf{t}, X, \tau)$ *выполняется* (3.4).

Доказательство очевидно (см. [18, § 3.7]). Случай, рассматриваемый в следствии 3.1, называем компактифицируемым (см. [20–22]) и уделяем ему основное внимание (напомним понятие компактификатора [22]).

Определение 3.1. Если (X, τ) – ТП и $r \in X^E$, то называем (X, τ, r)-компактификатором всякий кортеж $(K, \mathbf{t}, p, q)$, для которого $(K, \mathbf{t})$ – компактное ТП, $p \in K^E$, $q \in C(K, \mathbf{t}, X, \tau)$ и $r = q \circ p$.

Предложение 3.2. *Пусть* (X, τ) – *хаусдорфово ТП,* $r \in X^E$, $(K, \mathbf{t}, p, q)$ *есть* (X, τ, r)-*компактификатор и* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$. *Тогда справедливо равенство* $(\mathbf{as})[X; \tau; r; \mathcal{E}] = q^1((\mathbf{as})[K; \mathbf{t}; p; \mathcal{E}])$.

Определение 3.2. Триплет (X, τ, r), где (X, τ) – ТП и $r \in X^E$, называем компактифицируемым, если существует (X, τ, r)-компактификатор.

Замечание 3.1. В [22, с. 190, 191] показано, что при всяком выборе ТП (X, τ) и оператора $r \in X^E$ триплет (X, τ, r) компактифицируем тогда и только тогда, когда $r^1(E) \in (\tau - \mathrm{comp})^0[X]$. Это свойство ранее было отмечено Е. Г. Пыткеевым в устной форме.

Предложение 3.3. *Если* (X, τ) – *компактное ТП и* $r \in X^E$, *то триплет* (X, τ, r) *непременно компактифицируем.*

Доказательство очевидно (см. замечание 3.1). Далее приведена одна традиционная (в общей топологии) процедура построения компактификатора, модифицированная для задачи о построении МП.

4. Стоун-чеховский (волмэновский) компактификатор в задаче о построении множества притяжения

Здесь мы совсем кратко напомним построения [15, 23, 24], фиксируя непустое множество E в качестве пространства обычных решений;

$$(\ \ \mathbf{u}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E]) \tag{4.1}$$

есть непустой нульмерный [18] компакт, отвечающий расширению Волмэна дискрета $(E, \mathcal{P}(E))$ и соответствующий в нашем случае (расширения дискрета) варианту компактификации Стоуна–Чеха. Отображение

$$\mathbf{m} \stackrel{\triangle}{=} (E - \text{ult})[\cdot] \in \ _{\mathbf{u}}[E]^E \tag{4.2}$$

погружает E в компакт (4.1) в виде всюду плотного множества

$$_{\mathbf{u}}[E] = \text{cl}(\mathbf{m}^1(E), \tau_{\mathbf{fi}}[E]). \tag{4.3}$$

Подчеркнем, что (см. [15, 23, 24]) при всяком выборе $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$

$$^0_{\mathbf{u}}[E \mid \mathcal{E}] = \{\mathcal{F} \in \ _{\mathbf{u}}[E] \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{F}\} \in (\tau_{\mathbf{fi}}[E] - \text{comp})[\ _{\mathbf{u}}[E]]. \tag{4.4}$$

Особо выделяем случай компактифицируемого в смысле определения 3.2 триплета (X, τ, r), для которого (X, τ) – хаусдорфово ТП.

Определение 4.1. Триплет (X, τ, r), у которого (X, τ) – хаусдорфово ТП, $r \in X^E$ и, кроме того, существует (X, τ, r)-компактификатор, называем далее отделимым компактифицируемым триплетом (ОКТ).

Из замечания 3.1 имеем, конечно, очевидное положение: при всяком выборе хаусдорфова ТП (X, τ) и оператора $r \in X^E$, (X, τ, r) есть ОКТ тогда и только тогда, когда $r^1(E) \in (\tau - \text{comp})^0[X]$.

Если (X, τ) – ТП, $r \in X^E$ и $\mathcal{F} \in \ _{\mathbf{u}}[E]$, то

$$(r - \text{LIM})[\mathcal{F} \mid \tau] \stackrel{\triangle}{=} \{x \in X \mid r^1[\mathcal{F}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} x\}$$

(обозначение согласуется с [15, 23, 24]). Для всякого ОКТ (X, τ, r) и ультрафильтра $\mathcal{F} \in \ _{\mathbf{u}}[E]$ непременно $\exists!\, x \in X : \ (r - \text{LIM})[\mathcal{F} \mid \tau] = \{x\}$. С учетом этого полагаем, что при всяком выборе ОКТ (X, τ, r) оператор

$$[\tau \mid r] : \quad _{\mathbf{u}}[E] \longrightarrow X \tag{4.5}$$

определяется правилом: если $\mathcal{U} \in \ _{\mathbf{u}}[E]$, то для $\ [\tau \mid r](\mathcal{U}) \in X$

$$(r - \text{LIM})[\mathcal{U} \mid \tau] = \{\ [\tau \mid r](\mathcal{U})\}. \tag{4.6}$$

Если (X, τ, r) – ОКТ, то (см. [15, 22–24]) для оператора (4.5), (4.6) имеем следующие свойства:

$$\begin{gathered}\big(\ [\tau \mid r] \in C(\ _{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E], X, \tau)\big) \ \&\ (r = \ [\tau \mid r] \circ \mathbf{m}) \ \& \\ \&\ \big(\ [\tau \mid r] \in \text{cl}(r^1(E), \tau)^{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]}_{(*)}\big).\end{gathered} \tag{4.7}$$

Предложение 4.1. *Для всякого ОКТ* (X, τ, r) *кортеж*

$$(\ _{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E], \mathbf{m},\ \ [\tau \mid r])$$

является (X, τ, r)*-компактификатором со свойством* (4.3).

Из предложений 3.2 и 4.1 вытекает следующее свойство (см. [15, 23, 24]): если (X, τ, r) есть ОКТ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то (см. раздел 8 работы [15]) по свойствам множества (4.4)

$$(\mathbf{as})[X; \tau; r; \mathcal{E}] = \ \ [\tau \mid r]^1((\mathbf{as})[\ _{\mathbf{u}}[E]; \tau_{\mathbf{fi}}[E]; \mathbf{m}; \mathcal{E}]) = \ \ [\tau \mid r]^1(\ ^0_{\mathbf{u}}[E \mid \mathcal{E}]). \quad (4.8)$$

5. Абстрактная задача о достижимости в условиях ограничений

Вернемся к задаче, намеченной в разделе 1. Напомним в этой связи, что E – непустое пространство решений, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{X}$ – непустые множества, $Y \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$; заданы два оператора с областью определения E:

$$(\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E)\ \&\ (\mathbf{s} \in \mathbf{X}^E). \quad (5.1)$$

Множество Y задает ограничение на выбор решения $e \in E$ в виде условия $\mathbf{s}(e) \in Y$, которое будем называть Y-ограничением; множество всех достижимых (на значениях оператора $\mathbf{h}$) при данном Y-ограничении элементов множества $\mathbf{H}$ есть

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)) \in \mathcal{P}(\mathbf{H}). \quad (5.2)$$

Разумеется, (5.2) можно рассматривать в качестве решения невозмущенной задачи. Возмущения отождествляем далее с ослаблением Y-ограничения. В согласии с [25] рассматриваем асимптотическую версию исходной задачи, характеризуемой кортежем $(E, \mathbf{H}, \mathbf{X}, Y, \mathbf{h}, \mathbf{s})$.

Всюду в дальнейшем фиксируем топологию τ множества $\mathbf{H}$, получая ТП $(\mathbf{H}, \tau)$ (очень часто, но не всегда, эта топология порождается метрикой; если это имеет место, то $(\mathbf{H}, \tau)$ называют метризуемым ТП (см. [18])). Фиксируем также топологию θ множества $\mathbf{X}$, получая ТП $(\mathbf{X}, \theta)$. Здесь также возможен случай метризуемого ТП, но мы им не ограничиваемся.

Топология τ позволяет конструировать МП в $\mathbf{H}$; наличие же топологии θ позволяет, в частности, ввести ограничения асимптотического характера во множестве E по следующей схеме (см. раздел 1).

Фиксируем непустое семейство $\mathcal{Y}$ окрестностей Y в ТП $(\mathbf{X}, \theta)$:

$$\mathcal{Y} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N}_\theta[Y]). \quad (5.3)$$

Всюду в настоящем разделе полагаем (в согласии с [25]), что выполнено следующее условие $\mathcal{Y}$-регулярности:

$$\forall\, x \in \mathbf{X} \setminus Y\ \exists\, H_1 \in N_\theta(x)\ \exists\, H_2 \in \mathcal{Y}: \quad H_1 \cap H_2 = \varnothing. \quad (5.4)$$

Замечание 5.1. Условие (5.4) выполняется, если $(\mathbf{X}, \theta)$ – регулярное [26, гл. 4] ТП, Y – замкнутое множество в этом ТП, а $\mathcal{Y} = \mathbb{N}_\theta[Y]$. Последнее предположение не всегда естественно. В частности, если топология θ порождена метрикой множества $\mathbf{X}$ (т. е. $(\mathbf{X}, \theta)$ – метризуемое ТП), а Y – непустое замкнутое множество, то в качестве $\mathcal{Y}$ имеет смысл выбрать семейство всех ε-окрестностей Y, $\varepsilon > 0$, в смысле исходной метрики; условие (5.4) будет при этом выполняться. В общем случае условия (5.4) множество $\mathbf{X} \setminus Y$ есть окрестность (в смысле [9]) каждой своей точки и поэтому открыто, т. е. $\mathbf{X} \setminus Y \in \theta$; стало быть, Y непременно замкнуто (при условии (5.4)).

Определение 5.1. Кортеж $(K, \mathbf{t}, p, q, r)$ называем моделью расширения для триплетов $(\mathbf{H}, \tau, \mathbf{h})$ и $(\mathbf{X}, \theta, \mathbf{s})$, если $(K, \mathbf{t})$ – ТП,

$$(p \in K^E) \ \& \ (q \in C_{\mathbf{ap}}(K, \mathbf{t}, \mathbf{H}, \tau)) \ \& \ (r \in C(K, \mathbf{t}, \mathbf{X}, \theta)) \tag{5.5}$$

и, кроме того, справедливы следующие три равенства:

$$(K = \mathrm{cl}(p^1(E), \mathbf{t})) \ \& \ (\mathbf{h} = q \circ p) \ \& \ (\mathbf{s} = r \circ p). \tag{5.6}$$

В терминах (5.3) введем следующее непустое семейство $\mathcal{E}$ подмножеств E:

$$\mathcal{E} \overset{\triangle}{=} \mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}]. \tag{5.7}$$

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, условие (5.7) полагаем выполненным. Напомним, что выполнено также условие (5.4).

Теорема 5.1. *Если* $(K, \mathbf{t}, p, q, r)$ *– модель расширения для триплетов* $(\mathbf{H}, \tau, \mathbf{h})$ *и* $(\mathbf{X}, \theta, \mathbf{s})$, *то*

$$(\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}] = q^1(r^{-1}(Y)). \tag{5.8}$$

Доказательство легко извлекается из теоремы 4.1 работы [25] с использованием (3.3). Мы используем, конечно, стандартные конструкции общей топологии, связанные с замкнутыми и почти совершенными отображениями (см. [18, 26]). С учетом (5.2) и теоремы 5.1 мы получаем, что при всяком выборе модели расширения (для триплетов $(\mathbf{H}, \tau, \mathbf{h})$ и $(\mathbf{X}, \theta, \mathbf{s})$) эффект расширения (связанный с использованием асимптотической версии исходной задачи) заключается в преобразовании

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)) \longrightarrow q^1(r^{-1}(Y)). \tag{5.9}$$

Итак, мы используем замены отображений $\mathbf{h} \longrightarrow q$, $\mathbf{s} \longrightarrow r$, сохраняя основную операцию: построение образа прообраза множества Y.

6. Компактифицируемая модель расширения и стоун-чеховский компактификатор

В настоящем разделе, возвращаясь к (5.5), (5.6) и сохраняя фиксированными триплеты $(\mathbf{H}, \tau, \mathbf{h})$ и $(\mathbf{X}, \theta, \mathbf{s})$, мы отметим одну возможность в части построения более совершенной модели расширения. Всюду в настоящем разделе полагаем выполненным следующее.

Условие 6.1. *Каждое из ТП* $(\mathbf{H}, \tau)$ *и* $(\mathbf{X}, \theta)$ *является хаусдорфовым.*

Предложение 6.1. *Если* $(K, \mathbf{t})$ *– компактное ТП,* $p \in K^E$, $q \in C(K, \mathbf{t}, \mathbf{H}, \tau)$, $r \in C(K, \mathbf{t}, \mathbf{X}, \theta)$ *и*

$$(K = \mathrm{cl}(p^1(E), \mathbf{t})) \ \& \ (\mathbf{h} = q \circ p) \ \& \ (\mathbf{s} = r \circ p), \tag{6.1}$$

то кортеж $(K, \mathbf{t}, p, q, r)$ *является моделью расширения для триплетов* $(\mathbf{H}, \tau, \mathbf{h})$ *и* $(\mathbf{X}, \theta, \mathbf{s})$.

Доказательство использует хорошо известные свойства непрерывного отображения из компактного ТП в хаусдорфово (см. в этой связи [18, § 3.7]); отметим также построения [21, с. 77].

Определение 6.1. Если $(K, \mathbf{t})$ – компактное ТП, а триплет (p, q, r),

$$(p \in K^E) \ \& \ (q \in C(K, \mathbf{t}, \mathbf{H}, \tau)) \ \& \ (r \in C(K, \mathbf{t}, \mathbf{X}, \theta)),$$

удовлетворяет условиям (6.1), то кортеж $(K, \mathbf{t}, p, q, r)$ называем компактифицируемой моделью расширения (КМР) для триплетов $(\mathbf{H}, \tau, \mathbf{h})$ и $(\mathbf{X}, \theta, \mathbf{s})$.

Теорема 6.1. *Если выполнено условие* $\mathcal{Y}$*-регулярности* (5.4) *и* $(K, \mathbf{t}, p, q, r)$ *– КМР для триплетов* $(\mathbf{H}, \tau, \mathbf{h})$ *и* $(\mathbf{X}, \theta, \mathbf{s})$, *то справедливо* (5.8).

Доказательство получаем комбинацией теоремы 5.1 и предложения 6.1.

Замечание 6.1. Известно, что в случае, когда существует КМР, появляется возможность реализации МП в виде множеств $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Z)), \tau)$, где $Z \in \mathcal{Y}$, с точностью до любой наперед выбранной окрестности. Речь идет о свойстве, подобном [25, § 6] и являющемся частным случаем свойства, отмеченного в [20, с. 269].

Как отмечено в разделе 4, в случае, когда $\mathbf{h}^1(E)$ и $\mathbf{s}^1(E)$ – суть предкомпактные множества в ТП $(\mathbf{H}, \tau)$ и $(\mathbf{X}, \theta)$ соответственно, определены операторы $[\tau \mid \mathbf{h}]$ и $[\theta \mid \mathbf{s}]$, свойства которых указаны в (4.7).

Предложение 6.2. *Если* $\mathbf{h}^1(E) \in (\tau - \mathrm{comp})^0[\mathbf{H}]$ *и* $\mathbf{s}^1(E) \in (\theta\ -\ \mathrm{comp})^0[\mathbf{X}]$, *то кортеж*

$$(\ \ _{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E], \mathbf{m},\ \ [\tau \mid \mathbf{h}],\ \ [\theta \mid \mathbf{s}]) \tag{6.2}$$

есть КМР для триплетов $(\mathbf{H}, \tau, \mathbf{h})$ *и* $(\mathbf{X}, \theta, \mathbf{s})$.

Доказательство. В силу свойства, упомянутого после определения 4.1, $(\mathbf{H}, \tau, \mathbf{h})$ и $(\mathbf{X}, \theta, \mathbf{s})$ суть ОКТ. Из предложения 4.1 следует, что:

1) $(\ \ _{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E], \mathbf{m},\ \ [\tau \mid \mathbf{h}])$ является $(\mathbf{H}, \tau, \mathbf{h})$-компактификатором со свойством (4.3);
2) $(\ \ _{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E], \mathbf{m},\ \ [\theta \mid \mathbf{s}])$ является $(\mathbf{X}, \theta, \mathbf{s})$-компактификатором со свойством (4.3).

Используя (4.2), (4.3) и (4.7), получаем следующие положения:

$$(\mathbf{m} \in\ \ _{\mathbf{u}}[E]^E) \;\&\; (\ \ [\tau \mid \mathbf{h}] \in C(\ \ _{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E], \mathbf{H}, \tau)) \;\&\; (\ \ [\theta \mid \mathbf{s}] \in$$
$$\in C(\ \ _{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E], \mathbf{X}, \theta)) \;\&\; (\ \ _{\mathbf{u}}[E] = \mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(E), \tau_{\mathbf{fi}}[E])) \;\&$$
$$\& \; (\mathbf{h} =\ \ [\tau \mid \mathbf{h}] \circ \mathbf{m}) \;\&\; (\mathbf{s} =\ \ [\theta \mid \mathbf{s}] \circ \mathbf{m}).$$

Из определения 6.1 с учетом компактности ТП (4.1) имеем требуемое положение: (6.2) есть КМР для триплетов $(\mathbf{H}, \tau, \mathbf{h})$ и $(\mathbf{X}, \theta, \mathbf{s})$.

Предложение 6.3. *Если* $\mathbf{h}^1(E) \in (\tau - \mathrm{comp})^0[\mathbf{H}]$ *и* $\mathbf{s}^1(E) \in (\theta\ -\ \mathrm{comp})^0[\mathbf{X}]$, *то при условии* (5.4) *справедливо следующее равенство:*

$$(\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}] =\ \ [\tau \mid \mathbf{h}]^1(\ \ [\theta \mid \mathbf{s}]^{-1}(Y)).$$

Доказательство получается комбинацией теорем 5.1 и 6.1.

Теорема 6.2. *Следующие утверждения эквивалентны:*
1) *существует КМР для триплетов* $(\mathbf{H}, \tau, \mathbf{h})$ *и* $(\mathbf{X}, \theta, \mathbf{s})$;
2) $\mathbf{h}^1(E) \in (\tau - \mathrm{comp})^0[\mathbf{H}]$ *и* $\mathbf{s}^1(E) \in (\theta - \mathrm{comp})^0[\mathbf{X}]$.

Доказательство. Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) истинна в силу предложения 6.2. Пусть имеет место 1). Пусть $(K, \mathbf{t}, p, q, r)$ – КМР для $(\mathbf{H}, \tau, \mathbf{h})$ и $(\mathbf{X}, \theta, \mathbf{s})$. Итак, $(K, \mathbf{t})$ – компактное ТП и выполнено (6.1), где p, q и r соответствуют определению 6.1. С учетом непрерывности q и r

$$(q^1(K) \in (\tau - \mathrm{comp})[\mathbf{H}]) \;\&\; (r^1(K) \in (\theta - \mathrm{comp})[\mathbf{X}]). \tag{6.3}$$

Тогда $\mathbf{h}^1(E) = (q \circ p)^1(E) = q^1(p^1(E)) \subset q^1(K)$, коль скоро $p^1(E) \subset K$. Подобным рассуждением получаем, что $\mathbf{s}^1(E) = (r \circ p)^1(E) = r^1(p^1(E)) \subset r^1(K)$. В силу (6.3) $(\mathbf{h}^1(E) \in (\tau - \mathrm{comp})^0[\mathbf{H}]) \;\&\; (\mathbf{s}^1(E) \in (\theta - \mathrm{comp})^0[\mathbf{X}])$, т. е. истинно 2). Итак, 1) $\Longrightarrow$ 2).

7. Компактифицируемый триплет обобщенных оценок

Для фиксированного триплета $(E, \mathbf{H}, \mathbf{h})$ введем множество

$$\mathbb{H} \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{h}^1(E) \in \mathcal{P}'(\mathbf{H}) \tag{7.1}$$

всех оценок, реализуемых в обычном смысле; $\mathbf{h} \in \mathbb{H}^E_{(*)}$ (данное свойство называем собственной сюръективностью $\mathbf{h}$). Тогда [9, гл. I] с учетом (7.1)

$$\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \in \ _{\mathbf{u}}[\mathbb{H}] \quad \forall\, \mathcal{F} \in \ _{\mathbf{u}}[E]. \tag{7.2}$$

На основе (7.2) конструируем оператор , действующий из $\ _{\mathbf{u}}[E]$ в $\ _{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]$ по правилу

$$(\mathcal{F}) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \quad \forall\, \mathcal{F} \in \ _{\mathbf{u}}[E]. \tag{7.3}$$

Разумеется, в виде   (7.3) мы имеем частный случай оператора, используемого в [11, с. 213], поэтому именуем   оператором Чеха. Отметим, что данный оператор – непрерывная сюръекция:

$$\in C(\ _{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E], \ _{\mathbf{u}}[\mathbb{H}], \tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}]) \cap \ _{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]^{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]}_{(*)}; \tag{7.4}$$

именно, в силу (7.4) отображение   есть непрерывная сюръекция непустых нульмерных [18] компактов

$$(\ _{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E]), \quad (\ _{\mathbf{u}}[\mathbb{H}], \tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}]). \tag{7.5}$$

В отношении (7.4) отметим также общие положения [19, п. 6.9]. Компакты (7.5) суть обобщенные версии множеств E и $\mathbb{H}$ соответственно. Если $\mathbf{h}$ – инъекция из E в $\mathbf{H}$, то   – гомеоморфизм компактов (7.5). Используем (см. разделы 3, 4) отображения

$$\mathbf{m} = (E - \mathrm{ult})[\cdot], \ \ \mathbf{n} \stackrel{\triangle}{=} (\mathbb{H} - \mathrm{ult})[\cdot], \tag{7.6}$$

реализуя (в (7.6)) погружения множеств E и $\mathbb{H}$ в первый и второй компакты (7.5) соответственно. Наряду с (4.3) имеем равенство $\ _{\mathbf{u}}[\mathbb{H}] = \mathrm{cl}(\mathbf{n}^1(\mathbb{H}), \tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}])$. Итак, операторы погружения (7.6) реализуют всюду плотные множества в компактах (7.5) (см. [19]). Из определений вытекает равенство

$$\circ\, \mathbf{m} = \mathbf{n} \circ \mathbf{h}, \tag{7.7}$$

с которым связывается следующее естественное расширение:

$$(\mathbb{H}, \mathbf{h}) \longrightarrow (\ _{\mathbf{u}}[\mathbb{H}], \mathbf{n} \circ \mathbf{h}) \tag{7.8}$$

исходного пространства оценок; в связи с расширением (7.8) заметим, что $\mathbf{n}$ есть биекция $\mathbb{H}$ на множество $\mathbf{n}^1(\mathbb{H})$. Следовательно, ультрафильтры из $\ _{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]$ можно рассматривать как обобщенные оценки (ОО). Из (7.4), (7.7) и определения 3.1 следует очевидное

Предложение 7.1. *Кортеж* $(\ _{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E], \mathbf{m},\ )$ *является*

$$(\ _{\mathbf{u}}[\mathbb{H}], \tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}], \mathbf{n} \circ \mathbf{h})\text{-}\textit{компактификатором.}$$

Предложение 7.2. *Кортеж* $(\ _{\mathbf{u}}[\mathbb{H}], \tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}], \mathbf{n} \circ \mathbf{h})$ *есть ОКТ.*

Доказательство следует из предложения 3.3. Учтем предложение 4.1.

Предложение 7.3. *Справедливо равенство* $\ [\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}] \mid \mathbf{n} \circ \mathbf{h}] =\ .$

Доказательство. В силу предложений 4.1 и 7.2 кортеж

$$(\ _{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E], \mathbf{m},\ [\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}] \mid \mathbf{n} \circ \mathbf{h}]),$$

как легко видеть, является $(\ _{\mathbf{u}}[\mathbb{H}], \tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}], \mathbf{n} \circ \mathbf{h})$-компактификатором. С учетом определения 3.1 имеем равенство

$$\mathbf{n} \circ \mathbf{h} =\ [\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}] \mid \mathbf{n} \circ \mathbf{h}] \circ \mathbf{m}. \tag{7.9}$$

Из (7.7), (7.9) мы получаем также равенство

$$\circ\, \mathbf{m} =\ [\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}] \mid \mathbf{n} \circ \mathbf{h}] \circ \mathbf{m}. \tag{7.10}$$

В свою очередь, из (7.10) имеем $\ (\mathbf{m}(e)) =\ [\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}] \mid \mathbf{n} \circ \mathbf{h}](\mathbf{m}(e))\ \ \forall e \in E$. Последнее означает справедливость следующего равенства:

$$(\ \mid \mathbf{m}^1(E)) = (\ [\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}] \mid \mathbf{n} \circ \mathbf{h}] \mid \mathbf{m}^1(E)). \tag{7.11}$$

Из (7.11) получаем [10, с. 193] с учетом непрерывности операторов и $\ [\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}] \mid \mathbf{n} \circ \mathbf{h}]$, а также (4.3), требуемое совпадение и $\ [\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}] \mid \mathbf{n} \circ \mathbf{h}]$ (следует учесть, кроме того, факт отделимости второго в (7.5) ТП).

Предложения 7.1 и 7.3 указывают на тесную связь оператора Чеха с конструкциями расширения: данный оператор есть важный элемент стоун-чеховского компактификатора для задачи о достижимости, в которой пространство оценок преобразовано в соответствии с (7.8). Структура оператора Чеха раскрывается в (4.6) и предложении 7.3: мы имеем оператор предельного перехода в смысле второго в (7.5) ТП.

8. К вопросу о расширении одной задачи управления материальной точкой

Мы возвращаемся к задаче о построении МП в задаче управления материальной точкой, намеченной в разделе 1, при некотором усложнении постановки. Применяем конструкции расширений [13, 14, 25, 27] в классе конечно-аддитивных мер, слабо абсолютно непрерывных относительно заданной меры. Напомним эти конструкции.

Фиксируем произвольную полуалгебру [28] $\mathcal{L}$ подмножеств промежутка $I \triangleq [0,1)$, для которой выполнены следующие условия:

1) $[a,b) \in \mathcal{L}\ \forall a \in I\ \forall b \in [0,1]$;

2) каждое множество из $\mathcal{L}$ является борелевским подмножеством I.

Имеем измеримое пространство (ИП) $(I,\mathcal{L})$ с полуалгеброй множеств. Через $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ обозначаем множество всех неотрицательных вещественнозначных конечно-аддитивных мер (см. [29, 30]) на полуалгебре $\mathcal{L}$, получая конус в $\mathbb{R}^{\mathcal{L}}$ (здесь и ниже $\mathbb{R}$ – вещественная прямая). Множество $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ всех вещественнозначных конечно-аддитивных мер на $\mathcal{L}$, имеющих ограниченную вариацию, при оснащении поточечно определяемыми линейными операциями (а также «поточечными» умножением и порядком) порождается как линейное пространство конусом $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$. В $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ определяется сильная норма; ее значением для каждой меры $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ является полная вариация μ на множестве I. Если $\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, то сильная норма μ совпадает с $\mu(I)$. Здесь и ниже используем общие определения и положения [29, гл. III, IV].

Если $L \in \mathcal{P}(I)$, то через χ_L, $\chi_L \in \mathbb{R}^I$, обозначаем индикатор L; см. [28, с. 56]. Линейную оболочку множества $\{\chi_L :\ L \in \mathcal{L}\}$ обозначаем через $B_0(I,\mathcal{L})$, следуя [13, 14, 25, 27]. Тогда $B_0(I,\mathcal{L})$ – линейное многообразие в банаховом пространстве (БП) $\mathbb{B}(I)$ всех ограниченных вещественнозначных функций на I, оснащаемом традиционной sup-нормой $\|\cdot\|$. В согласии с [29, гл. IV] обозначаем через $B(I,\mathcal{L})$ замыкание $B_0(I,\mathcal{L})$ в БП $(\mathbb{B}(I), \|\cdot\|)$; тогда $B(I,\mathcal{L})$ с нормой, индуцированной из $(\mathbb{B}(I), \|\cdot\|)$, само является БП, а пространство $B^*(I,\mathcal{L})$, топологически сопряженное к $B(I,\mathcal{L})$, изометрически изоморфно $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ в сильной норме.

Через $B^+(I,\mathcal{L})$ (через $B_0^+(I,\mathcal{L})$) обозначаем множество всех неотрицательных функций из $B(I,\mathcal{L})$ (из $B_0(I,\mathcal{L})$). Интегрирование функций из $B(I,\mathcal{L})$ относительно мер из $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ осуществляем, используя простейшую схему [13, § 3.4], которая достаточна для построения конкретного изометрического изоморфизма $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ на $B^*(I,\mathcal{L})$ на основе сопоставления каждой мере $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ функционала

$$f \longmapsto \int_I f\,d\mu :\ B(I,\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Оснащая $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ $*$-слабой топологией $\tau_*(\mathcal{L})$ [13, с. 70], получаем локально выпуклый σ-компакт

$$(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_*(\mathcal{L})); \tag{8.1}$$

используем известную теорему Алаоглу (см. [29, гл. V]) об условиях компактности в ТП (8.1).

Через η обозначаем далее след меры Лебега–Бореля на полуалгебру $\mathcal{L}$ (данное не совсем обычное обозначение выбрано в целях лучшего согласования последующих конструкций с более общими построениями [13, 14, 25, 27, 31]). Пусть

$$(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \stackrel{\triangle}{=} \{\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \mid \forall\, L \in \mathcal{L}\ \ ((\eta(L) = 0) \Longrightarrow (\mu(L) = 0))\}$$

(замкнутый в ТП (8.1) конус всех неотрицательных слабо абсолютно непрерывных (см. [30]) относительно η вещественнозначных конечно-аддитивных мер на $\mathcal{L}$).

Если $f \in B^+(I,\mathcal{L})$, то (следуя [13–17, 21, 25] и [27]) через $f\,*$ обозначаем неопределенный η-интеграл функции f (см. [13, § 3.4]), $f * \eta \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]$. Пусть $\mathbf{p}$ – оператор

$$f \longmapsto f * \eta :\ B_0^+(I,\mathcal{L}) \ \longrightarrow (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta].$$

Для топологии $\tau_\eta^*(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \tau_*(\mathcal{L}) \mid_{(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]}$ [13, § 4.2], согласно теореме 4.3.1 монографии [13],

$$\begin{aligned} &\mathrm{cl}(\mathbf{p}^1(B_0^+(I,\mathcal{L})), \tau_\eta^*(\mathcal{L})) = \\ &\qquad = \mathrm{cl}(\mathbf{p}^1(B_0^+(I,\mathcal{L})), \tau_*(\mathcal{L})) \cap (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] = (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Если $k \in \mathcal{N}$, то через $\mathbb{R}_k$ обозначаем k-мерное арифметическое пространство, понимаемое ниже как множество всех кортежей $(x_i)_{i\in\overline{1,k}}$ в $\mathbb{R}$; через $\tau_{\mathbb{R}}^{(k)}$ обозначаем топологию покоординатной сходимости в $\mathbb{R}_k$. Всюду в дальнейшем полагаем, что $E = B_0^+(I,\mathcal{L})$; итак, обычные решения – ступенчатые в смысле ИП $(I,\mathcal{L})$ неотрицательные вещественнозначные функции на I.

В отношении (1.3) будем полагать, что $\beta \in B^+(I,\mathcal{L})$; напомним, что (см. раздел 1) множество-образ $\beta^1(I)$ содержится в $[\kappa,\infty)$ при некотором $\kappa \in (0,\infty)$ (мы несколько обобщаем условие на β в разделе 1, сохраняя, однако, требование об отделенности от нуля).

Фиксируем, кроме того, $m \in \mathcal{N}$ и $W \in C_{\mathbf{ap}}(\mathbb{R}_2, \tau_{\mathbb{R}}^{(2)}, \mathbb{R}_m, \tau_{\mathbb{R}}^{(m)})$. Всюду в дальнейшем полагаем, что $\mathbf{H} = \mathbb{R}_m$ и $\tau = \tau_{\mathbb{R}}^{(m)}$.

Каждому управлению $f \in E$ сопоставляется единственная траектория $\varphi_f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_2$ системы (1.3), для которой $\varphi(0) = x^0$ (напомним, что $x^0 \in \mathbb{R}_2$;

см. раздел 1); ее компоненты $\varphi_{f,1}$ и $\varphi_{f,2}$, являющиеся вещественнозначными функциями на $[0,1]$, принимают в момент $t=1$ следующие значения:

$$\varphi_{f,1}(1) = x_1^0 + x_2^0 + \int_0^1 (1-\xi)\beta(\xi)f(\xi)\eta(d\xi), \qquad \varphi_{f,2}(1) = x_2^0 + \int_0^1 \beta(\xi)f(\xi)\eta(d\xi),$$

где $x_1^0 \in \mathbb{R}$, $x_2^0 \in \mathbb{R}$ – компоненты вектора x^0. Разумеется, $\varphi_f(1) = (\varphi_{f,i}(1))_{i\in\overline{1,2}}$. Оператор $\mathbf{h}$ определяем условием $\mathbf{h}(f) \stackrel{\triangle}{=} W(\varphi_f(1))\ \forall f \in E$. Мы определили триплет $(\mathbf{H}, \tau, \mathbf{h})$.

Фиксируем $\mathbf{k} \in \mathcal{N}$; пусть далее $\mathbf{X} = \mathbb{R}_{\mathbf{k}}$. Кроме того, полагаем $\theta = \tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{k})}$. Возвращаясь к (1.4), постулируем, что $g_i \in B(I, \mathcal{L})\ \forall i \in \overline{1,\mathbf{k}}$. Здесь мы также используем некоторое обобщение в сравнении с разделом 1. Оператор $\mathbf{s}$ определяем условием

$$\mathbf{s}(f) \stackrel{\triangle}{=} \left(\int_I g_i f\, d\eta\right)_{i\in\overline{1,\mathbf{k}}} \quad \forall f \in E.$$

Таким образом триплет $(\mathbf{X}, \theta, \mathbf{s})$ полностью определен. Фиксируем, наконец, $\mathbb{Y} \in \mathcal{P}'(\mathbf{X})$; постулируем (как и в разделе 1), что множество $\mathbb{Y}$ замкнуто в «обычном» смысле, т. е. замкнуто в смысле θ.

Введем теперь нужное семейство $\mathcal{Y}$ окрестностей множества $Y = \mathbb{Y}$. Если $x = (x_i)_{i\in\overline{1,\mathbf{k}}} \in \mathbf{X}$, то полагаем $\|x\|_{\mathbf{k}} \stackrel{\triangle}{=} \sup(\{|\ x_i\ |:\ i \in \overline{1,\mathbf{k}}\})$. При $\varepsilon \in (0,\infty)$ полагаем, что

$$\mathbb{Y}_\varepsilon \stackrel{\triangle}{=} \{z \in \mathbf{X} \mid \exists\, y \in \mathbb{Y}:\ \|y - z\|_{\mathbf{k}} < \varepsilon\}.$$

Поскольку норма $\|\cdot\|_{\mathbf{k}}$ порождает топологию θ, то $\mathcal{Y} \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbb{Y}_\varepsilon :\ \varepsilon \in]0,\infty[\}$ есть семейство открытых окрестностей $\mathbb{Y}$. Более того, при $Y = \mathbb{Y}$ данное семейство $\mathcal{Y}$ удовлетворяет условию (5.4); итак, в нашем случае выполнено условие $\mathcal{Y}$-регулярности. Семейство $\mathcal{E}$ определяем далее посредством (5.7). Мы завершили конкретизацию основной задачи, включая ее асимптотическую версию. Нашей целью является построение МП с использованием модели расширения в классе конечно-аддитивных мер.

Используя соглашение $\mathbf{K} \stackrel{\triangle}{=} (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]$, получаем $\mathbf{p} \in \mathbf{K}^E$. Следуя [25], будем рассматривать элементы $\mathbf{K}$ как обобщенные управления. Если $\mu \in \mathbf{K}$, то в духе [25, § 8] конструируем функцию $\tilde{\varphi}_\mu\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_2$, компоненты которой $\tilde{\varphi}_{\mu,1}$ и $\tilde{\varphi}_{\mu,2}$ – вещественнозначные функции на $[0,1]$ – определяются условиями (см. [27, § 7])

$$\tilde{\varphi}_{\mu,1}(t) = x_1^0 + t x_2^0 + \int_{[0,t[} (t-\xi)\beta(\xi)\,\mu(d\xi), \qquad \tilde{\varphi}_{\mu,2}(t) = x_2^0 + \int_{[0,t[} \beta(\xi)\,\mu(d\xi).$$

Итак, введены обобщенные траектории нашей системы. Введем также следующие два функционала π_1 и π_2 на $\mathbb{A}(\mathcal{L})$:

$$\pi_1(\mu) \stackrel{\triangle}{=} x_1^0 + x_2^0 + \int_I (1-\xi)\beta(\xi)\,\mu(d\xi), \qquad \pi_2(\mu) \stackrel{\triangle}{=} x_2^0 + \int_I \beta(\xi)\,\mu(d\xi).$$

Введем в рассмотрение оператор $\mathbf{q} \in \mathbf{H}^{\mathbf{K}}$:

$$\mathbf{q}(\mu) \stackrel{\triangle}{=} W(\tilde{\varphi}_\mu(1)). \tag{8.3}$$

Разумеется, $\mathbf{q}$ (8.3) является сужением на $\mathbf{K}$ отображения

$$\mu \longmapsto W((\pi_i(\mu))_{i\in\overline{1,2}}) :\ \mathbb{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbf{H}; \tag{8.4}$$

последнее непрерывно как m-вектор-функция на ТП (8.1) по определению $*$-слабой топологии $\tau_*(\mathcal{L})$ и в силу непрерывности W. Для топологии

$$\tau_\eta^*(\mathcal{L}) = \tau_*(\mathcal{L}) \mid_{\mathbf{K}} \tag{8.5}$$

имеем очевидное свойство непрерывности оператора (8.3):

$$\mathbf{q} \in C(\mathbf{K}, \tau_\eta^*(\mathcal{L}), \mathbf{H}, \tau). \tag{8.6}$$

Предложение 8.1. $\mathbf{q} \in C_{\mathbf{ap}}(\mathbf{K}, \tau_\eta^*(\mathcal{L}), \mathbf{H}, \tau)$.

Доказательство подобно в идейном отношении обоснованию предложения 7.1 в работе [27], и мы ограничимся краткими замечаниями. В терминах числа $\kappa \in]0,\infty[$, являющегося нижней оценкой множества $\beta^1(I)$, мы получаем оценку

$$\mu(I) \leqslant \frac{1}{\kappa}(\pi_2(\mu) + \mid x_2^0 \mid) \quad \forall\, \mu \in \mathbf{K}. \tag{8.7}$$

Фактически (8.7) определяет некий стабилизатор, соответствующий скоростной компоненте фазового вектора. Пусть отображение ω действует из $\mathbf{K}$ в $\mathbb{R}_2$ по правилу $\omega(\mu) \stackrel{\triangle}{=} (\pi_i(\mu))_{i\in\overline{1,2}}$; это отображение соответствует частному случаю отображения, аналогичного [27, § 7]. С учетом (8.7) проверяется, что отображение ω почти совершенно (см. [27, с. 45]) и, в частности, замкнуто. Легко видеть, что $\mathbf{q} = W \circ \omega$. Теперь, в принципе, можно воспользоваться следствием 3.7.3 монографии [18]. Обсудим, однако, схему прямого доказательства.

Если F есть замкнутое подмножество $\mathbf{K}$, то $\mathbf{q}^1(F) = W^1(\omega^1(F))$ замкнуто в $(\mathbf{H}, \tau)$, в силу того, что ω и W – замкнутые отображения. Таким образом, $\mathbf{q} \in C_{\mathrm{cl}}(\mathbf{K}, \tau_\eta^*(\mathcal{L}), \mathbf{H}, \tau)$. Пусть $z \in \mathbf{H}$. Тогда $W^{-1}(\{z\}) \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(2)} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}_2]$, а потому для некоторого $a \in (0, \infty)$ имеем $| \, x_2 \, | \leqslant a \ \forall \, (x_i)_{i \in \overline{1,2}} \in W^{-1}(\{z\})$. Поэтому для $\mu \in \mathbf{q}^{-1}(\{z\})$ имеем с учетом (8.7) неравенство

$$\mu(I) \leqslant \frac{1}{\kappa}(a + | \, x_2^0 \, |).$$

Множество $\mathbf{q}^{-1}(\{z\})$ сильно ограничено. В силу (8.6) оно замкнуто в ТП $(\mathbf{K}, \tau_\eta^*(\mathcal{L}))$. Поскольку последнее (см. (8.5)) – замкнутое подпространство (8.1), то $\mathbf{q}^{-1}(\{z\})$ замкнуто в ТП (8.1) и, следовательно, компактно в этом ТП (т. е. $*$-слабо компактно). В силу транзитивности операции перехода к подпространству $\mathbf{q}^{-1}(\{z\}) \in (\tau_\eta^*(\mathcal{L}) - \mathrm{comp})[\mathbf{K}]$. Поскольку выбор z был произвольным, требуемое свойство $\mathbf{q}$ установлено (на самом деле имеем [18] свойство совершенности $\mathbf{q}$).

Определяем оператор $\mathbf{r} \in C(\mathbf{K}, \tau_\eta^*(\mathcal{L}), \mathbf{X}, \theta)$ по следующему правилу:

$$\mathbf{r}(\mu) \triangleq \left(\int_I g_i \, d\mu \right)_{i \in \overline{1, \mathbf{k}}} \quad \forall \, \mu \in \mathbf{K}.$$

Предложение 8.2. *В рассматриваемой задаче о достижимости в пространстве* $(\mathbf{H}, \tau) = (\mathbb{R}_m, \tau_{\mathbb{R}}^{(m)})$ *для МП имеем равенство*

$$(\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}] = \mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbb{Y})).$$

Доказательство следует из теоремы 5.1 и предыдущего предложения. Итак, для построения нужного МП используется обобщенная задача управления. Среди обобщенных управлений – элементов $\mathbf{K}$ – выделяются допустимые в смысле точного соблюдения $\mathbb{Y}$-ограничения и для них определяются терминальные состояния (значения фазового вектора в момент $t = 1$). Совокупность всех таких состояний – область достижимости в классе конечно-аддитивных управлений-мер – определяет искомое МП.

В рамках данного подхода установлены некоторые условия асимптотической нечувствительности при ослаблении ограничений по части переменных (имеются в виду те функции g_i, $i \in \overline{1, \mathbf{k}}$, которые обладают свойством ступенчатости в смысле ИП $(I, \mathcal{L})$). Этот хорошо исследованный вопрос сейчас не рассматриваем, отсылая читателя к [13, 14, 16, 17] (см., например, теорему 4.2.1 монографии [14]).

Литература

1. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.

2. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

3. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
4. Панасюк А. И., Панасюк В. И. Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. Минск: Наука и техника, 1986.
5. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1965.
6. Ченцов А. Г. Несеквенциальные приближенные решения в абстрактных задачах управления // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби: Тр. Международ. семинара. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2006. Т. 1. С. 48–60.
7. Богачев В. И. Основы теории меры. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. Т. 1.
8. Богачев В. И. Основы теории меры. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. Т. 2.
9. Бурбаки Н. Общая топология. М.: Наука, 1968.
10. Алекандрян Р. А., Мирзаханян Э. А. Общая топология. М.: Высш. шк., 1979.
11. Čech E. Topological spaces. Prague: Academia, 1966.
12. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.
13. Chentsov A. G. Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. N. Y.; L.; M.: Plenum Publishing Corporation, 1996.
14. Chentsov A. G. Asymptotic attainability. Dordrecht; Boston; L.: Kluwer Academic Publishers, 1997.
15. Ченцов А. Г. Некоторые конструкции асимптотического анализа, связанные с компактификацией Стоуна–Чеха // Современная математика и ее приложения / Акад. наук Грузии. Ин-т кибернетики. 2005. Т. 26. С. 119–150.
16. Ченцов А. Г. К вопросу о корректном расширении некоторых неустойчивых задач управления с интегральными ограничениями // Изв. АН. Сер. матем. 1999. № 63. С. 185–223.
17. Ченцов А. Г. К вопросу о корректном расширении одной задачи о выборе плотности вероятности при ограничениях на систему математических ожиданий // Успехи матем. наук. 1995. Т. 50, вып. 5 (305). С. 223–242.
18. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
19. Архангельский А. В. Компактность // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1989. Т. 50. С. 5–128.
20. Ченцов А. Г. Топологические конструкции расширений и представления множеств притяжения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2000. Т. 6. С. 269–301.

21. Chentsov A. G., Morina S. I. Extensions and Relaxations. Dordrecht; Boston; L.: Kluwer Academic Publishers, 2002.

22. Ченцов А. Г. Обобщенные множества притяжения и приближенные решения, их формирующие // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2004. Т. 10, № 2. С. 178–196.

23. Chentsov A. G. Some questions of asymptotic analysis: approximate solutions and extension constructions // Funct. Differ. Equ. 2005. Vol. 12, № 1–2. P. 119–148.

24. Chentsov A. G. Some properties of generalized attraction sets // Ibid. Vol. 13, № 3–4. P. 381–415.

25. Ченцов А. Г. К вопросу о построении корректных расширений в классе конечно-аддитивных мер // Изв. вузов. Математика. 2002. № 2. С. 58–80.

26. Келли Дж. Л. Общая топология. М.: Наука, 1981.

27. Chentsov A. G. Extensions in the class of finitely additive measures // Soochow J. Math. 2004. Vol. 30, № 1. P. 27–54.

28. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.

29. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

30. Bhaskara Rao K. P. S., Bhaskara Rao M. Theory of charges. A study of finitely additive measures. N. Y.: Acad. Press, 1983.

31. Chentsov A. G. Finitely additive measures and extension constructions // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 2001. Vol. 2. P. 531–545.